Απαντήσεις σε εισαγωγικά ερωτήματα της ανθυφαίρεσης

1. Τί είναι ανθυφαίρεση μεταξύ δύο ευθ. τμημάτων α, β, με $\alpha < \beta$;

2. Ποιά η ανθυφαίρεση των αριθμών 300 και 18;

3. Πώς μπορούμε να αντιληφθούμε αν μια ανθυφαίρεση περατούται;

4. Η ανθυφαίρεση της Χρυσής Τομής

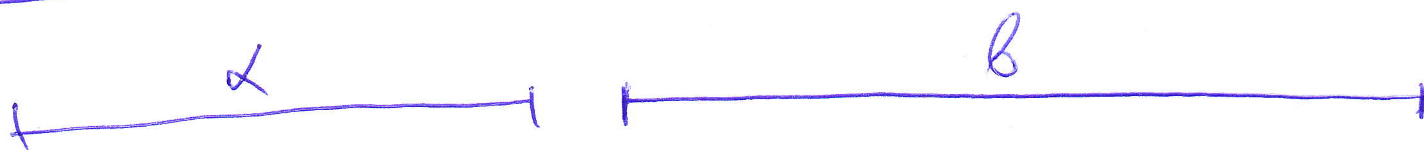
5. Η ανθυφαίρεση του $\sqrt{2}$ με την μονάδα

Πρόχειρες σημειώσεις για καλύτερη κατανόηση της έννοιας «ανθυφαίρεση»

ΓΙΑΝΝΗΣ Π. ΠΛΑΤΑΡΟΣ

Τι είναι η ανθυφαίρεση μεταξύ δύο τμημάτων α, β με $\alpha < \beta$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



1) βγάζω όσα α υπάρχουν στο β, και βρίσκω τι περισσεύει, αν περισσεύει, έστω γ

2) βγάζω όσα γ υπάρχουν στο α και γράφω τι περισσεύει, αν περισσεύει, έστω δ,

3) βγάζω όσα δ, υπάρχουν στο γ και .....

α) Αν καταλήξω να μην περισσεύει τίποτα, τα α και β έχουν <u>κοινό μέτρο</u>, είναι <u>σύμμετρα μεγέθη</u> η αναλογία $\frac{\beta}{\alpha}$ εκφράζει <u>ρητό αριθμό</u>

β) Αν η διαδικασία αυτή δεν τερματίζεται ΠΟΤΕ και συνεχίζεται στο διηνεκές επ' άπειρον, τότε τα α, β, ΔΕΝ έχουν κοινό μέτρο, έχουν ασύμμετρη σχέση και ο λόγος $\frac{β}{α}$ εκφράζει άρρητο αριθμό.

Το θέμα είναι, πώς μπορώ να καταλάβω, ότι η διαδικασία αυτή μπορεί και να μην τελειώνει ποτέ!

(Υπάρχει τρόπος, σε ορισμένες όμως περιπτώσεις!)

— ΑΦΗΝΟΥΜΕ ΤΟ ΘΕΜΑ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΡΟΣΩΡΙΝΑ —

Ποια είναι η ανθυφαίρεση μεταξύ των αριθμών 300 και 18;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

1) Βγάζω όσα 18-άρια υπάρχουν στο 300 (υπάρχουν 16 δεκαοκτάρια στο 300) και περισσεύουν 12 μονάδες

2) Βγάζω όσες δωδεκάδες υπάρχουν στο 18 (μία υπάρχει) και περισσεύουν 6

3) Βγάζω όσα 6-άρια υπάρχουν στο 18 (υπάρχουν τρία) και δεν περισσεύει τίποτα

ΑΡΑ: Η σχέση του 300 και του 18 είναι ρητή (το ξέραμε έτσι κι αλλιώς) και το 6 είναι κοινό μέτρο και του 300 και του 18, διότι

300 = 50 φορές το 6
18 = 3 φορές το 6

Το 6 είναι μέγιστο κοινό μέτρο και του 300 και του 18

Συμβολικά ΜΚΔ(300, 18) = 6

Δηλαδή: Η διαδικασία της ανθυφαίρεσης μεταξύ δύο ακεραίων, είναι η διαδικασία εύρεσης ΜΚΔ.

Δηλαδή: Η έννοια της ανθυφαίρεσης, προκειμένου για δύο ακεραίους, ταυτίζεται με την έννοια του Ευκλειδείου αλγορίθμου εύρεσης ΜΚΔ

Σημείωση: Δύο ακέραιοι πάντα έχουν κοινό μέτρο ~~και~~ αυτό είναι η μονάδα!
Με τον αλγόριθμο του Ευκλείδη, απλώς, βρίσκουμε το πιό μεγάλο μέτρο (κοινό) αν υπάρχει, πέραν της μονάδας.
Για δύο μεγέθη όπως είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα α, β όμως τι ισχύει;;;

Για τα ευθύγραμμα τμήματα υπάρχει ζήτημα!

1) Πώς γίνεται — αν γίνεται — η ανθυφαίρεση;

2) Πώς μπορώ να αποφανθώ αν αυτή η διαδικασία (αλγόριθμος) περατούται ή όχι;

Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου η διαδικασία αυτή, μπορεί να γίνει άπειρη, ότι συνεχίζεται στο διηνεκές και άρα η σχέση είναι άρρητη.

Ο Ιπασσος, λέγεται, ότι ανακάλυψε ότι η διαδικασία μεταξύ κάθετης πλευράς ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου και υποτείνουσάς του δεν περατούται ποτέ, άρα ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος!

Οι ιστορικοί πιστεύουν, ότι ο Ίππασος δεν ανεκάλυψε την άρρητη σχέση του $\sqrt{2}$ με την μονάδα, αλλά την άρρητη σχέση πλευράς κανονικού πενταγώνου με την διαγώνιό του δ.

$$\text{Ανθφ}(\delta, \alpha) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$$

Είναι η πιό απλή ανθυφαιρετική σχέση που υπάρχει και μάλλον αυτήν ανεκάλυψε ο Ίππασος του οποίου η ανακάλυψη έσπασε το Πυθαγόρειο φιλοσοφικό σύστημα ότι όλες οι σχέσεις-λόγοι μεταξύ (ομοειδών) μεγεθών είναι σύμμετρες-ρητές, υπάρχει δηλ. κοινό μέτρο πάντα μεταξύ δύο μεγεθών.

Πώς όμως μπορούσε να αντιληφθεί κάποιος ότι μια ανθυφαίρεση δεν περατώνεται ποτέ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Στο θέμα της πλευράς και της διαγωνίου κανονικού πενταγώνου ήταν πολύ φανερό!

Πώς;;;

1) Κάνω την διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} \delta & \alpha \\ \hline \delta-\alpha & 1 \end{array}$$

Ταυτότητα διαίρεσης:

$$\delta = 1 \cdot \alpha + (\delta - \alpha), \text{ με } \delta-\alpha < \alpha$$

(βγαίνει από το σχήμα!)

2) Κάνω την διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} \alpha & \delta-\alpha \\ -(\delta-\alpha) & 1 \\ \hline 2\alpha-\delta & \end{array}$$

Ταυτότητα διαίρεσης: $\alpha = 1 \cdot (\delta-\alpha) + (2\alpha-\delta)$, με $2\alpha-\delta < \delta-\alpha$

3) Κάνω την διαίρεση:

$$\begin{array}{r|l} \delta-\alpha & 2\alpha-\delta \\ \cline{2-2} -(2\alpha-\delta) & 1 \\ \hline 2\delta-3\alpha & \end{array}$$

Ταυτότητα: $(\delta-\alpha)=1\cdot(2\alpha-\delta)+(2\delta-3\alpha)$, με $2\delta-3\alpha<2\alpha-\delta$

4) Κάνω την διαίρεση:
(το υπόλοιπο γίνεται διαιρέτης και ο διαιρέτης, διαιρετέος)

$$\begin{array}{r|l} 2\alpha-\delta & 2\delta-3\alpha \\ \cline{2-2} -(2\delta-3\alpha) & 1 \\ \hline 5\alpha-3\delta & \end{array}$$

Ταυτότητα διαίρεσης:

$$2\alpha-\delta=1\cdot(2\delta-3\alpha)+(5\alpha-3\delta),$$ με

$$\mu\epsilon\ (5\alpha-3\delta)<(2\delta-3\alpha)$$

Τα παραπάνω προκύπτουν από το σχήμα!

Από το σχήμα προκύπτει μια ομοιότητα που επαναλαμβάνεται ες αεί!
Έφθασα μέχρι το 4ο βήμα και βλέπω συνεχώς πηλίκο το 1

Γιατί βγαίνει όλο το 1;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Για τον λόγο για τον οποίο (λόγος=αιτία) όπου όλες οι παρακάτω διαιρέσεις δίνουν το ίδιο πηλίκο!

$\delta \,|\, \alpha$, $3\delta \,|\, 3\alpha$, $\lambda\cdot\delta \,|\, \lambda\cdot\alpha$

Τόσο απλό είναι!

Εδώ έχουμε:

$$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\delta-\alpha} = \frac{\delta-\alpha}{2\alpha-\delta} = \frac{2\alpha-\delta}{2\delta-3\alpha} = \ldots$$

- $\frac{\delta}{\alpha}$ → πρώτο βήμα αλγορίθμου
- $\frac{\alpha}{\delta-\alpha}$ → δεύτερο βήμα
- $\frac{\delta-\alpha}{2\alpha-\delta}$ → τρίτο
- $\frac{2\alpha-\delta}{2\delta-3\alpha}$ → τέταρτο

Από την πρώτη ισότητα έχω:

$\alpha^2 = \delta(\delta-\alpha) \Leftrightarrow \delta^2 - \alpha\delta - \alpha^2 = 0$, απ' όπου

$\frac{\delta}{\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61\ldots = \varphi$ (λόγος χρυσής τομής)

και αφού υπάρχει ασύμμετροι λόγοι
θα βρίσκω συνέχεια πηλίκο 1
και ανθυφ(δ,λ) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]
Πώς εξηγείται αυτό;

Ο τρίτος λόγος, σχηματίζεται όπως
σχηματίζεται ο δεύτερος από τον πρώτο.
(αντιστροφή και αφαίρεση επόμενου από ηγούμενο)

Για να το δείτε καλά αυτό,
πάρτε το πρώτο αποτέλεσμα
που θα βρείτε στην Google
αν βάλετε τις λέξεις-κλειδιά:
Ανθυφαίρεση, πλευράς, διαγωνίου
κανονικού, πενταγώνου.

Να βρεθεί η ανθυφαίρεση του $\sqrt{2}$ με την μονάδα.

Απάντηση :

Ζητείται Ανθύφ $(\sqrt{2}, 1)$

Πρώτα πρέπει να κάνω την διαίρεση

$$\begin{array}{c|c} \sqrt{2} & 1 \\ \hline U & \Pi \end{array}$$

και να βρώ το σωστό πηλίκο (Π) απαραιτήτως ακέραιο και το σωστό υπόλοιπο (U) έτσι ώστε $U < 1$. (Το υπόλοιπο πρέπει πάντα να είναι μικρότερο από τον διαιρέτη 1.

Για να βρώ το Π, θα κάνω δοκιμές. Με το "μάτι" δεν ξέρω να εκτιμήσω πόσες φορές χωράει το 1 στο $\sqrt{2}$.

Μπορώ «να κλέψω» λίγο στους υπολογισμούς αφού ξέρω από το κομπιουτεράκι, ότι

$\sqrt{2} \simeq 1,4142...$

Άρα το 1 στο $\sqrt{2}$ χωράει 1 φορά και περισσεύει 0,4142...

όπου $0,4142... < 1$

Άρα την βρήκα την <u>πρώτη</u> διαίρεση του αλγορίθμου της ανθυφαίρεσης.

$\sqrt{2}$	1
$-\ 1$	1
$\sqrt{2}-1$	

Γράφω και την σχετική <u>ταυτότητα της διαίρεσης</u>

$$\sqrt{2} = 1 \cdot 1 + (\sqrt{2}-1), \text{ με } \sqrt{2}-1 < 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon, \text{ με } \upsilon < \delta$$

— B —

Μετά, πρέπει να κάνω την διαίρεση

υ	δ
υ'	π'

Ποιο είναι το π'; ποιο το υ';

1	$\sqrt{2}-1$
	1
$2-\sqrt{2}$	

Δοκιμάζω με το 1 για πηλίκο

πρέπει όμως να ισχύει και η ταυτότητα της διαίρεσης! $1 = 1\cdot(\sqrt{2}-1)+(2-\sqrt{2})$ (ισχύει εκ κατασκευής)

και

$2-\sqrt{2} < \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow$

$3 < 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$9 < 4\cdot 2 \Leftrightarrow$

$9 < 8$ άτοπο

Άρα δεν είναι πηλίκο το 1,

δοκιμάζω το 2

$$\begin{array}{r|l} 1 & \sqrt{2}-1 \\ \cline{2-2} -(2\sqrt{2}-2) & 2 \\ \cline{1-1} 3-2\sqrt{2} & \end{array}$$

Ταυτότητα διαίρεσης: $1 = 2(\sqrt{2}-1) + (3-2\sqrt{2})$

και πρέπει επιπλέον

$3-2\sqrt{2} < \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow$

$4 < 3\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$16 < 9\cdot 2 \Leftrightarrow$

$16 < 18$ αληθές

Επομένως, μέχρι στιγμής:

Ανθυφ. $(\sqrt{2}, 1) = [1, 2, ;, ;, ;]$

Συνεχίζω:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2}-1 & 3-2\sqrt{2} \\ \cline{2-2} -(3-2\sqrt{2}) & 1 \\ \cline{1-1} 3\sqrt{2}-4 & \end{array}$$

Εξετάζω την ισχύ: $3\sqrt{2}-4 < 3-2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$7 > 5\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$49 > 50$ άτοπο

Δοκιμάζω με πηλίκο το 2:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{2}-1 & 3-2\sqrt{2} \\ -(6-4\sqrt{2}) & 2 \\ \hline 5\sqrt{2}-7 & \end{array}$$

Πρέπει $5\sqrt{2}-7 < 3-2\sqrt{2} \iff$

$7\sqrt{2} < 10 \iff$

$98 < 100$ αληθές!

Άρα $\text{Ανθυφ.}(\sqrt{2},1) = [1, 2, 2, ;\ ;\ ;]$

Μήπως το ψηφίο 2 είναι περίοδος της ανθυφαίρεσης και άρα είναι ατελεύτητη;

(ή όπερ το αυτό: Μήπως το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος;)

Παρατήρηση

Αν το 2 είναι περίοδος, (Αν) θα arkei να ισχύει

$$\frac{\sqrt{2}-1}{1} = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \iff$$

$(\sqrt{2}-1)^2 = 3-2\sqrt{2} \iff 2+1-2\sqrt{2} = 3-2\sqrt{2}$ ισχύει!

Άρα $\text{Ανθυφ}(\sqrt{2},1) = [1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$